1998 год

Рациональные аппроксимации аналитических функций

А. А. Гончар

Введение

Проблематика, связанная с классическими конструкциями рациональных аппроксимаций аналитических функций (непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их обобщения), составляет важное направление на стыке комплексного анализа, теории приближений и вычислительной математики. Развитие этого направления в XVIII–XIX вв. связано с именами многих выдающихся математиков – от Эйлера, Лагранжа, Гаусса до Чебышева, Маркова, Стильтьеса. Интерес к конструктивным рациональным аппроксимациям вновь значительно возрос в последние десятилетия. Благодаря современному развитию вычислительной техники, начиная с 1960-х гг. *метод аппроксимаций Паде* находит новые приложения к самым разнообразным вопросам физики, механики и других наук. С другой стороны, теоретический анализ возникающих при этом проблем приводит к принципиально новым задачам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов и других областях анализа.

Ниже я остановлюсь на некоторых результатах в указанном направлении, полученных мною и моими учениками в 1980–1990-х гг. Эти результаты относятся к теории сходимости и обратным задачам теории аппроксимаций Паде, применению многоточечных аппроксимаций Паде (решений интерполяционной задачи Коши–Якоби) к вопросу о скорости чебышевской рациональной аппроксимации аналитических функций, асимптотическим свойствам аппроксимаций Эрмита–Паде для систем функций марковского типа. Подчеркну, что всюду в работе речь идет о приближениях рациональными функциями со *свободными* полюсами; все рассматриваемые аппроксимации имеют *нелинейный* характер. Оптимальный выбор коэффициентов не только числителя, но и *знаменателя* рациональной функции позволяет соответствующим аппроксимациям моделировать особенности аппроксимируемых функций и осуществлять эффективное аналитическое продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд. С этим связаны принципиальные преимущества рассматриваемых аппроксимаций по сравнению с полиномиальными аппроксимациями, а также рациональными аппроксимациями с заранее *фиксированными* полюсами.

1. Теория сходимости. Обратные задачи

1.1. *Аппроксимации Паде* – это локально наилучшие рациональные аппроксимации аналитической функции, заданной своим разложением в степенной ряд. Точнее, аппроксимацией Паде типа (n, m) степенного ряда $f(z)=\sum_0^\infty c_k z^k$ называется рациональная функция $f_{n,m}(z)$, степень числителя которой $\le n$ и степень знаменателя $\le m$, имеющая максимально возможный (в классе всех таких рациональных функций) порядок касания с рядом f в точке $z=0$. Аппроксимация Паде $f_{n,m}$ может быть определена так же, как отношение p/q любых полиномов $p,q (q\not\equiv 0)$, удовлетворяющих соотношениям $\deg p\le n$, $\deg q\le m$, $(qf-p)(z) = Az^{n+m+1}+\dots$. Для любой пары индексов (n, m) существует *единственная* аппроксимация Паде $f_{n,m}$ ряда f. Она вычисляется непосредственно по коэффициентам $c_0, c_1,\dots,c_{n+m}$. Совокупность всех аппроксимаций $\{f_{n,m}\}, (n, m)\in N_0\times N_0$ составляет *таблицу Паде* степенного ряда f. Наибольший интерес (как для теории, так и для приложений) представляют *диагональные* последовательности $f_{n,n+j}$, $j \in Z$ – фиксировано (в первую очередь – *главная диагональ* $f_{n,n}$) и *строки* таблицы Паде $f_{n,m}$, $m \in N$ – фиксировано.

Классические алгоритмы, связанные с разложением функций или переразложением степенных рядов в непрерывные дроби, тесно связаны с аппроксимациями Паде. Как правило, подходящие дроби таких непрерывных дробей являются диагональными аппроксимациями Паде соответствующих степенных рядов. Многие фундаментальные результаты, связанные с аппроксимациям Паде, были получены в рамках классической теории непрерывных дробей.

Основные результаты *теории сходимости непрерывных дробей* формулируются в терминах, связанных с параметрами соответствующих непрерывных дробей. Эти теоремы сходимости плохо приспособлены к современным приложениям аппроксимаций Паде. В ***теории сходимости аппроксимаций Паде*** основной интерес представляют результаты двух типов – прямые и обратные. В *прямых* теоремах на основании известной заранее информации об аналитическом продолжении функции, заданной своим разложением в степенной ряд (области голоморфности и мероморфности, расположение и характер особых точек, принадлежность функции к тому или иному классу, например, классу алгебраических функций и т. п.) делаются те или иные выводы о сходимости соответствующих аппроксимаций, асимптотическом поведении их полюсов, скорости сходимости и др. Отметим, что при общих предположениях об аналитических свойствах заданной функции ее аппроксимации Паде могут иметь *случайные* полюсы в области голоморфности приближаемой функции; поэтому в соответствующих теоремах общего характера речь идет о сходимости вне «малых» исключительных множеств (почти равномерная сходимость, сходимость по мере или по емкости). В *обратных* задачах исходные данные связаны с самими аппроксимациями Паде; особый интерес представляют обратные теоремы, в которых на основе минимальной информации о предельном поведении полюсов аппроксимаций Паде делаются выводы об аналитическом продолжении приближаемой функции, расположении и характере ее особенностей. Сами эти выводы базируются на исследовании областей сходимости соответствующих последовательностей аппроксимаций Паде. Ясно, что с точки зрения приложений особенно важны именно обратные результаты.

1.2. Первые результаты о *строках* таблицы Паде были получены Адамаром (в неявной форме) и Монтессу де Болором. Опираясь на формулы Адамара для радиусов m – мероморфности функции f, заданной своим разложением в степенной ряд, в 1902 г. Монтессу доказал следующую теорему: *если функция f имеет ровно m полюсов в круге D: $|z| < R$ (здесь и в дальнейшем полюсы считаются с учетом их кратностей), то m-я строка $\{f\}$ ее таблицы Паде равномерно сходится к f внутри (на компактных подмножествах) области D', которая получается из D удалением полюсов функции f*. По существу, была доказана равномерная сходимость $\{f_{n,m}\}$ внутри D в *сферической метрике*. Отсюда уже следует, что полюсы аппроксимаций сходятся к полюсам заданной функции: каждый полюс функции «притягивает» столько полюсов аппроксимаций, какова его кратность, и сходятся они к полюсам со скоростью геометрической прогрессии (*геометрически*). Последнее утверждение нетрудно обратить: если полюсы m-й строки Паде формального степенного ряда f геометрически сходятся к некоторым точкам комплексной плоскости, то ряд f определяет m-мероморфную функцию в круге D, содержащем все эти точки.

Тот факт, что в этих результатах речь идет о функциях, имеющих ровно m полюсов, связан с существом дела. В общем случае (когда число полюсов $\le m$), ситуация значительно усложняется; в частности, можно утверждать равномерную сходимость m-й строки только вне множеств произвольно малой 1-меры. Тем не менее, и для общего случая удалось «сомкнуть» прямые и обратные теоремы и в терминах, связанных с предельным поведением полюсов строк таблицы Паде, полностью охарактеризовать m-мероморфное продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд [1].

Пусть $RQ > 0$ – радиус сходимости ряда /. При любом натуральном m положим: D_m – максимальный открытый круг с центром в нуле, в который $f(z), |z| < R_0$, продолжается как мероморфная функция, имеющая $\le m$ полюсов; R_m – радиус круга D_m; $d_m = \{(a_1, \nu_1), ..., (a_s, \nu_s)\}$ – дивизор полюсов f в D_m, $|d_m| = \nu_1 + ... + \nu_s$ – число полюсов f в D_m (с учетом их кратностей). Пусть $\{f_{n,m}\}$ – m-я строка таблицы Паде ряда f. Для любого $a \in C - \{0\} = C^*$ введем две характеристики – $\Delta(a)$ и $\mu(a)$, связанные с асимптотическим поведением последовательности множеств $P_{n,m} = \{z_{n,1},...,z_{n,m_n}\}$, $n = 1,2,...$, где $z_{n,1},...,z_{n,m_n}$, $m_n \le m$ – конечные (свободные) полюсы рациональной функции $f_{n,m}$. А именно, $\Delta(a) = \limsup_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{m_n} |z_{n,j}; a|^{1/n}$ ($|z'; z''|$ – сферическое расстояние), $\mu(a) \ge 0$ – число полюсов $f_{n,m}$, стремящихся к a со скоростью геометрической прогрессии. Положим $P_m = \{a \in C^*: \Delta(a) < 1\}$.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1) $P_m \ne 0$; 2) $R_m > R_0 > 0$. При этом, $R_m = \dfrac{|a|}{\Delta(a)}$ *для всех* $a \in P_m$, $d_m = \{(a, \mu(a)): a \in P_m\}$.

Простая геометрическая природа характеристик Δ и μ (и, тем самым, связанных с ними формул) позволила доказать аналогичные результаты для значительно более общих (чем классические аппроксимации Паде) рациональных интерполяционных процессов.

Предположим теперь, что все m свободных полюсов m-й строки таблицы Паде степенного ряда f стремятся к определенным точкам $a_1, \dots, a_m \in C^*$, но ничего не известно о скорости их сходимости. Оказывается, уже на основании этой информации можно сделать выводы о мероморфном продолжении функции, заданной рядом f, и ее *особых точках*. При $m=1$ соответствующее утверждение составляет содержание классической теоремы Фабри «об отношении»: *если для коэффициентов степенного ряда f справедливо соотношение $\frac{c_n}{c_{n+1}} \to a \neq 0$ при $n \to \infty$, то $z = a$ – особая точка суммы этого ряда на границе его круга сходимости* (очевидно, что в этом случае $R_0 = |a|$). Эта замечательная теорема прямо связана с *первой* строкой таблицы Паде, поскольку единственный конечный полюс ζ_n соответствующих аппроксимаций $f_{n,1}$ находится по формуле $\zeta_n = \frac{c_n}{c_{n+1}}$. Следующая теорема, обобщающая теорему Фабри на случай произвольного $m > 1$, была доказана С. П. Суетиным [2] в 1984 г. (после ряда промежуточных результатов в этом направлении).

Теорема. *Если для фиксированного $m > 1$ функции $f_{n,m}$ имеют ровно m конечных* полюсов $\zeta_{n,1}, \dots, \zeta_{n,m}$ (для $n > n(f)$) и $\zeta_{n,j} \to a_j \in C^*$ *при $n \to \infty$ ($j = 1, 2, \dots, m$), то*

1) $R_{m-1} = \max\{|a_j|, j = 1, \dots, m\}$ *и все точки a_j, лежащие в круге D_{m-1}, являются полюсами функции $f(z)$, $z \in D_{m-1}$.*

2) *Все точки a_j, лежащие на границе круга D_{m-1}, являются особыми точками функции $f(z)$, $z \in D_{m-1}$.*

1.3. Наибольший интерес в теории аппроксимаций Паде и их обобщений представляют диагональные аппроксимации. Следующий результат общего характера относится к диагональным аппроксимациям Паде степенного ряда [3]. Пусть U – открытый круг, содержащий точку $z = 0$, или область в расширенной комплексной плоскости C, являющаяся объединением таких кругов, $D = U - e$, где e – относительно замкнутое подмножество области U, имеющее нулевую емкость ($0 \notin e$); f_n, $n = 1, 2, \dots$ – последовательность диагональных аппроксимаций Паде ряда f, такая, что $(f - f_n)(z) = Az^{2n+1} + \dots$ для всех достаточно больших n.

Теорема. *Если аппроксимации Паде f_n формального степенного ряда f не имеют полюсов в области D (для всех $n > n\{f\}$), то последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри (на компактных подмножествах) области D и, тем самым, ряд f определяет функцию, голоморфную в D.*

Заметим, что из классических результатов о нормальных семействах мероморфных функций (теорема Монтеля) вытекает равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ в том случае, когда функции этой последовательности выпускают *три* значения: a, b и $c = \infty$. Теорема показывает, что последовательности диагональных аппроксимаций Паде имеют замечательную специфику – их равномерная сходимость (в указанных областях) вытекает уже из того факта, что функции f_n выпускают только *одно* значение $c = \infty$.

Утверждения теоремы справедливы и в том случае, когда множество полюсов диагональных аппроксимаций Паде *не имеет предельных точек в области D*. Последнее условие, очевидно, и необходимо для равномерной сходимости внутри D (по определению). Принципиальное значение соответствующего *критерия равномерной сходимости* заключается в том, что формулируется он в терминах, связанных только с предельным поведением *полюсов* диагональных аппроксимаций Паде.

Такой же характер имеет следующий *критерий равномерной сходимости в сферической метрике* (при тех же условиях на f и D).

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *последовательность $\{f_n\}$ диагональных аппроксимаций Паде ряда f равномерно сходится в сферической метрике внутри области D;* 2) *существует дискретное подмножество P области D $(0 \notin P)$ и функция p: $P \to N$ такие, что множество полюсов последовательности $\{f_n\}$ не имеет предельных точек в области $D - P$, число полюсов f_n, $n > n(f)$ в окрестности каждой точки $a \in P$ равно $p(a)$, и все они стремятся к a с геометрической скоростью.*

В частности, если выполнено условие 2, *то ряд f определяет мероморфную функцию $f(z)$, $z \in D$, множество полюсов которой совпадает с P, а кратность полюса f в точке $a \in P$ равна $p(a)$.*

Последний вывод (уже для случая круга и конечного числа полюсов) наиболее важен для приложений.

2. Скорость рациональных аппроксимаций аналитических функций

2.1. Задачи, связанные со скоростью чебышевских рациональных аппроксимаций аналитических функций, занимают центральное место в рассматриваемой теории. Анализ вопросов сходимости рациональных интерполяционных процессов со свободными полюсами позволил в последние годы решить узловые задачи в этом направлении.

Пусть E – компакт в $\hat{\mathbb{C}}$, $f \in C(E)$ и $\rho_n = \rho_n(f, E)$ – наилучшее приближение f на E (в чебышевской метрике). Если f *голоморфна* на компакте E ($f \in H(E)$), то последовательность ρ_n стремится к нулю *геометрически;* величина $q = q(f, E) = \limsup\limits_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} < 1$ является основной характеристикой скорости рациональной аппроксимации f на E. Вопросы описания величины q в терминах, связанных с аналитическим продолжением функции f, играют фундаментальную роль в теории рациональных аппроксимаций аналитических функций.

Пусть F – компакт, принадлежащий дополнению к E, и $h(E, F)$ – *модуль* конденсатора (E, F); иначе говоря, $h(E, F) = 1/c$, где $c = c(E, F)$ – *емкость* этого конденсатора. Верхнюю грань величины $h(E, F)$ в классе всех компактов F таких, что $f \in H(E)$ допускает голоморфное продолжение в $C - F$, обозначим через $h = h(f, E)$ и назовем эту величину *модулем голоморфности* функции f. Из результатов Уолша (1930-х гг.), относящихся к интерполяции рациональными функциями с *фиксированными* полюсами, вытекает *неравенство* $q \le e^{-h}$. В общем случае нельзя описать величину q в терминах, связанных только с понятием аналитического продолжения f; в частности, q нельзя выразить через h. С другой стороны, результаты автора, полученные в начале 1980-х гг. и основанные на интерполяции рациональными функциями со *свободными* полюсами, показали, что для широких классов аналитических функций (включающих важнейшие функции анализа) q *вычисляется по* h, причем *справедливо соотношение*

$$q = \lim_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = e^{-2h}. \qquad (*)$$

2.2. Прежде чем переходить к описанию общих результатов в рассматриваемом направлении, остановимся на методе многоточечных аппроксимаций Паде и схеме его применения к задачам о скорости рациональной аппроксимации.

Пусть $f \in H(E)$, $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}$, $k = 1,2,\dots, n$, $n = 1,2,\dots$ – треугольная таблица точек (узлов интерполяции), принадлежащих компакту E; положим $A_n(z) = (z - \alpha_{n,1}) \dots (z - \alpha_{n,n})$. Фиксируем натуральное число n и рассмотрим рациональную функцию $R_n = P_n/Q_n$, где P_n, Q_n – произвольные полиномы от z, удовлетворяющие условиям:

$$\deg P_n \le n-1,\ \deg Q_n \le n,\ (Q_n \equiv 0);\ \frac{Q_n f - P_n}{A_{2n}} \in H(E).$$

Последнее соотношение означает, что $Q_n f - P_n = 0$ во всех точках $2n$-й строки таблицы α. Полиномы, удовлетворяющие этому соотношению, *существуют* для любой $f \in H(E)$; их отношение определяет *единственную* рациональную функцию R_n (с точностью до обычного отождествления). Эта рациональная функция называется *многоточечной аппроксимацией Паде* (типа $(n-1,\ n)$) функции f, соответствующей узлам интерполяции $\alpha_{2n,1}, \ldots, \alpha_{2n,2n}$. Если $Q_n \ne 0$ в этих узлах, то R_n интерполирует в них функцию f. В противном случае, при переходе от $Q_n f - P_n$ к $f - R_n$ некоторые из интерполяционных условий теряются; однако потеря d_n условий интерполяции сопровождается понижением (на d_n) степеней числителя и знаменателя R_n. Основные трудности, связанные с применением многоточечных аппроксимаций Паде, лежат в анализе асимптотического поведения их полюсов и сходимости самих аппроксимаций. Если функция $f \in H(E)$ допускает голоморфное продолжение в открытое множество $G = C - F$ (без ограничения общности можно считать, что E и F – компакты в C и $f(\infty) = 0$), то полиномы Q_n удовлетворяют *комплексным* соотношениям ортогональности: $\int\limits_\gamma Q_n(t) t^j \dfrac{f(t)\,dt}{A_{2n}(t)}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, где γ – контур, охватывающий F (γ лежит в дополнении к $E \cup F$; интегралы по таким контурам не зависят от γ и их можно записывать как $\oint\limits_F$).

Приведенная ниже общая теорема о скорости рациональных аппроксимаций относится к последовательностям функций, задающихся интегралами типа Коши; она формулируется в терминах, связанных с равновесным распределением заряда на пластинах конденсатора при условии, что на одной из его пластин действует *внешнее поле*. Изучение характера сходимости многоточечных аппроксимаций Паде приводит к вопросам, связанным с предельным распределением нулей ортогональных многочленов с переменными (зависящими от номера многочлена) весовыми функциями; теоретико-потенциальные задачи равновесия с внешним полем позволяют охарактеризовать такие распределения. В случае комплексных соотношений ортогональности (для многозначных аналитических функций, например, для функций с конечным числом точек ветвления) возникает также проблема выбора компакта F. Важные результаты в этом направлении получены Г. Шталем; в частности, им были доказаны гипотезы Дж. Наттолла и автора, относящиеся к локальным аппроксимациям. Имеющиеся результаты показывают, что полюсы аппроксимаций «выбирают» экстремальную систему кривых F_f (при надлежащем выборе узлов интерполяции α). Однако в общем случае анализ задач о предельном распределении свободных полюсов аппроксимаций (нулей комплексных ортогональных многочленов) удобно основывать непосредственно на надлежащем свойстве *симметрии* соответствующей системы «разрезов» F. Вопросы построения кривых, обладающих этим свойством симметрии, и вычисления параметров соответствующих теоретико-потенциальных задач связаны с экстремальными задачами геометрической теории функций (типа задач Чеботарева и Лаврентьева) и траекториями квадратичных дифференциалов на римановых поверхностях.

2.3. Пусть (E, F) – регулярный конденсатор, ϕ – *гармоническое* поле в окрестности Ω компакта F, $M(E, F)$ – множество всех зарядов вида $\mu = \mu_F - \mu_E$, где μ_E, μ_F – вероятностные меры на E, F, соответственно. *Существует единственный заряд λ, принадлежащий $M(E, F)$ и удовлетворяющий следующим соотношениям равновесия:*

$$V^{\lambda}(z) \equiv w_E,\ z \in E;\ (V^{\lambda}+\phi)(z) \equiv w_F = \min_F (V^{\lambda}+\phi),\ z \in L = \operatorname{Supp}(\lambda_F)$$

(V^{λ} – логарифмический потенциал λ). λ – *равновесный заряд, $w = w_F - w_E$ – равновесная константа; константа* $w = \mathrm{w}(E, F, \phi)$ однозначно определяется соотношениями равновесия.

Будем говорить, что оснащенный конденсатор (E, P, ϕ) (точнее, его пластина F) обладает свойством *симметрии* в гармоническом поле ϕ и писать $(E, F, \phi) \in S$, если L – правильный компакт ($cap\,(L - L_0) = 0$, L в окрестности каждой точки $\zeta, \in L_0$ – аналитическая дуга) и $\dfrac{\partial (V^{\lambda} + \phi)}{\partial n_+}(\zeta) = \dfrac{\partial (V^{\lambda} + \phi)}{\partial n_-}(\zeta)$, $\zeta, \in L_0, \partial/\partial n_{\pm}$ – производные по нормали к L_0 в *противоположных направлениях.*

Следующая теорема доказана в работе [4] (см. также [5]).

Теорема. *Пусть Φ_n – последовательность функций, голоморфных в окрестности Ω. пластины F конденсатора (E, F), g – функция, голоморфная в $\Omega - F$. Предположим, что выполнены следующие условия* $\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{1}{|\Phi_n|} \to \phi$: *равномерно в* Ω; $(E, F, \phi) \in S$; $g \in H_0(\Omega - F)$

(*последнее означает, что* $g \in H_0\ (\Omega - F)$ *и имеет достаточно правильный «скачок» на* L_0). *Тогда для последовательности функций* $f_n(z) = \oint\limits_F \dfrac{\Phi_n(t)\, g(t)dt}{t - z}$, $z \in E$, *справедливо соотношение:* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n\ (f_n, E) = e^{-2w}$, *где* $w = w\ (E, F, \phi)$.

При $\Phi_n(z) = 1$ (тем самым, $\phi = 0$) из этой теоремы вытекает соотношение (*) для случая, когда E – континуум и элемент (f, E) определяет *многозначную аналитическую функцию с конечным числом точек ветвления* (в частности, *алгебраическую функцию*); величина h в соотношении (*) равна модулю конденсатора (E, F, ϕ), где F минимизирует емкость конденсатора (E, F) в классе $\{F\}$ всех компактов F таких, что $f \in H\ (\hat{C} - F)$ (F_j – решение обобщенной *экстремальной задачи Чеботарева*). Другое важное следствие: *E есть объединение $m \geq 2$ попарно непересекающихся континуумов $E_1, \dots, E_N$ и $f(z) \equiv c$ для $z \in E_j$, $j = 1, \dots, m$* (случай $m = 2$ соответствует классической задаче Золотарева); при этом величина h в (*) связана с решением конденсаторного аналога известной *экстремальной задачи Лаврентьева*.

2.4. Эта же теорема легла в основу решения известной задачи о скорости рациональной аппроксимации экспоненты на полуоси. Положим: $r_n = \rho_n(e^{-x}, E^+)$, $E^+ = [0, +\infty]$. Многочисленные работы были посвящены последовательному улучшению констант c_1, c_2 в оценках вида: $0 < c_1 < \liminf r_n^{1/n} \leq \limsup r_n^{1/n} \leq c_2 < 1$ и приближенным вычислениям (гипотетически существующего) предела $r_n^{1/n}$ при $n \to \infty$. С другой стороны, сама возможность *геометрической* скорости рациональной аппроксимации функции e^{-x}, имеющей существенную особенность в точке $z = \infty \in E^+$, породила большое число исследований в этом направлении.

Теорема дает решение задачи в терминах, связанных с равновесным зарядом в поле $\phi(z) = 1/2\, REz$ на (заранее неизвестной) пластине F конденсатора (E, F). Требование $(E, F, \phi) \in S$ позволяет найти эту пластину и дать явное решение соответствующей задачи равновесия в терминах, связанных с эллиптическими функциями и интегралами. Наиболее интересная (теоретико-числовая) форма ответа приводится ниже.

Теорема. *Существует предел* $v = \lim\limits_{n\to\infty} r_n^{1/n}$; *его значение v совпа-*

дает с положительным корнем уравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{8}$, *где* $a_n = \left| \sum_{d/n} (-1)^d d \right|$.

Явное решение получено и для более общей задачи о скорости рациональной аппроксимации функции e^{-z} в угловых областях вида E_θ: $|\arg z| \le \theta < \pi/2$. А именно, существует $\lim_{n\to\infty} \rho_n (e^{-z}, E_\theta)^{1/n} = \nu^\theta \in (0, 1)$; при этом $\nu^\theta = h^2$, где $h = \exp(\pi i \varpi'/\varpi)$ удовлетворяет уравнению: $\int_0^{1/2} = \left(\frac{\vartheta_0(t)}{\vartheta_3(t)}\right)^{2\alpha} dt = 0$, $\alpha = 1 - \frac{\theta}{\pi}$, ($\vartheta_0$, ϑ_3 – тэта-функции, соответствующие $\tau = \varpi'/\varpi$).

3. Метод векторных потенциалов. Аппроксимации Эрмита – Паде

3.1. Классическое понятие равновесного распределения заряда – для компакта (проводника) F и для конденсатора (F_1, F_2) – играет важную роль во многих вопросах теории приближений. Ряд задач, относящихся к рациональным аппроксимациям аналитических функций, естественным образом приводит к более общему понятию равновесного распределения зарядов (*равновесной векторной меры*) для *системы проводников* $(F_1, F_2, ..., F_m)$; при этом задаются *величины зарядов* на каждом из проводников, *закон их взаимодействия* и *внешние поля*, действующие в пределах этих проводников.

В соответствии со сказанным *исходными данными* рассматриваемой задачи являются: $F = (F_1, ..., F_m)$ – множество компактов в $\hat{C}$; $\theta = (\theta, K, \theta_m)$– вектор с положительными координатами; $A = \|\alpha_{j,k}\|$ – вещественная симметричная $m \times m$ матрица; $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ – множество непрерывных функций в $\hat{C}$ со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Для простоты будем предполагать, что F_j – отрезки вещественной прямой, A – положительно определенная матрица и $\alpha_{j,k} = 0$ при $F_j \cap F_k \ne \varnothing$.

Через $M = M_\theta(F)$ обозначим множество всех векторных мер $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$, где μ_j – меры с носителями $S(\mu_j) = \mathrm{Supp}\,\mu_j \in F_j$ и $|\mu_j| = \mu_j(F_j) = \theta_j$. Для меры $\mu \in M$ определим *векторный потенциал* $W^\mu = \{W_j^\mu(x), x \in F_j: j = 1, ... m$, координаты которого – сужения на F_j функций, $W_j^\mu(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} V^\mu(z) + \phi_j(z)$, $z \in C$. Энергия меры μ –

с учетом матрицы взаимодействия и вектора внешних полей – задается формулой: $J_\phi(\mu) = \sum_{j,k=1}^{m} a_{j,k}(\mu_j, \mu_k) + 2\sum_{k=1}^{m}\int \phi_k \, d\mu_k$, где (μ_j, μ_k) – взаимная энергия указанных мер.

Сформулируем теорему, лежащую в основе метода векторных потенциалов.

Теорема. *Каждая из следующих задач имеет единственное решение λ в классе M; решения этих задач совпадают:* $(A)\ J_\theta(\lambda) = \min_{\mu\in M} J_\theta(\mu)$. $(B)\ W_j^\mu(x) \equiv w_j = \min_{F_j} W_j^\mu$, $z \in S(\lambda_j)$, $j = 1, ..., m$; (C), $\min W_j^\mu = \max_{\mu\in M(j,\lambda)} \min_{F_j} W_j^\mu$, $j = 1, ..., m$, *где $M\ (j, \lambda)$ –множество мер $\mu \in M$ таких, что $\mu_k = \lambda_k$ для всех $k \neq j$.*

Векторная мера λ называется *равновесной мерой*. Наиболее важной для приложений является характеризация меры λ как решения задачи равновесия (B): *существует единственная мера $\lambda \in M$ такая, что имеют место соотношения: $W_j^\mu(x) = w_j$ на $S\ (\lambda_j)$ b $W_k^\mu(x) \geq w_j$ на всем отрезке F_j, $j = 1, ..., m$.* Это свойство равновесия однозначно определяет и меру λ, и набор *равновесных констант* $w = (w_1, ..., w_m)$.

3.2. В классической работе Эрмита о трансцендентности числа e была введена конструкция рациональных аппроксимаций, сыгравшая важную роль в ряде задач анализа и теории чисел. Один из основных вариантов этой конструкции состоит в построении рациональных аппроксимаций с общим знаменателем для конечного набора степенных рядов с центром в точке $z = \infty$: $f = (f_1, ..., f_m)$; $f_j(z) = \sum \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}$, $j = 1, ..., m$. А именно, фиксируем мультииндекс $n = (n_1, ..., n_m) \in Z_+^m$; $|n| = n_1 + ... + n_m$. Существует полином $Q_n(z) \equiv 0$, $\deg Q_n \leq |n|$, удовлетворяющий соотношениям: $(Q_n f_j - P_{n,j})(z) = \frac{A_{n,j}}{z^{n_j+1}} + ...$, $j = 1, ..., m$ ($P_{n,j}$ – полиномиальная часть степенного разложения $Q_n f_j$ в точке $z = \infty$). Рациональные функции $P_{n,j} = P_{n,j}/Q_n$, $j = 1, ..., m$, называются *аппроксимациями Эрмита – Паде* набора f. Если любой полином Q_n, удовлетворяющий определяющим соотношениям, с необходимостью имеет степень $|n|$ (такие индексы называются *нормальными*), то существует *единственный* набор $\{R_{n,j}\}$ аппроксимаций Эрмита – Паде для f.

Основываясь на методе векторных потенциалов, исследованы асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита – Паде для функций марковского типа: $f_j = \hat{s}_j = \int \frac{ds_j(x)}{x - z}$, $j = 1, ..., m$, где s_j – меры, носители которых – отрезки Δ_j вещественной оси и $s_j > 0$ п. в. на Δ_j. Случай, когда отрезки Δ_j попарно не пересекаются (*системы Анжелеско*) изучен в работе [6].

Теорема. *Пусть* $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_m)$ *– набор попарно непересекающихся отрезков,* $D = \hat{C} - \cup \Delta_j$, $\Lambda\Delta \frac{n}{|n|} \to \theta$*:– заданная последовательность мультииндексов,* λ *– равновесная мера, соответствующая исходным данным:* Δ, Δ *и матрице взаимодействия* $A = \|a_{j,k}\|$, *где* $a_{j,j} = 2$, $a_{j,k} = 1$ *при* $j \neq k$ $(\theta \equiv 0)$. *Тогда справедливы соотношения:*

$$\lim_{n\in\Lambda_\theta} |Q_n(z)|^{1/|n|} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} V^{\lambda_j}(z)\right), \ z \in D$$

$$\lim_{n\in\Lambda_\theta} \left|(f_j - R_{n,j})(z)\right|^{1/|n|} = \exp\left(W_j^{\lambda}(z) - w_j\right)$$

$$z \in D = \hat{C} - \cup \Delta_j, \ j = 1, ..., m.$$

Из этой теоремы следует, что последовательность аппроксимаций Эрмита – Паде $R_{n,j}$ *сходится* в области $D_j^{+} = \{z \in D : w_j - W_j^{\lambda}(z) < 0\}$ $D_j^{-} = \{z \in D : w_j - W_j^{\lambda}(z) < 0\}$ и *расходится* в области. Области сходимости всегда не пусты (они содержат точку $z = \infty$); непустыми могут оказаться и области расходимости. Последний факт – возможность существования областей расходимости – в *марковской* ситуации впервые был обнаружен в связи с приведенной теоремой.

В последующих работах на основе метода векторных потенциалов были изучены асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита – Паде для *систем Никитина* (Е. М. Никишин, Г. Шталь и др.). Эти системы соответствуют случаю, когда все отрезки Δ_j совпадают; специальная конструкция мер гарантирует их «независимость» и нормальность рассматриваемых индексов.

В недавней работе [7] исследованы аналогичные системы, удовлетворяющие общему условию: *для любых* j, k *отрезки* Δ_j *и* Δ_k *или*

не пересекаются, или совпадают. Каждая такая система определяется с помощью плоского графа Г, вершины которого нумеруют функции системы. Векторная задача равновесия (в частности, матрица взаимодействия A), определяющая асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде, существенно зависит от структуры графа Г.

В терминах, связанных с векторной задачей равновесия (в несколько иной форме) были исследованы также вопросы сходимости обобщенных аппроксимаций Паде ортогональных разложений (см. [8]).

1. *Гончар А. А.* Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций // Матем. сб. 1981. Т. 115. С. 590–613.

2. *Суетин С. П.* Об одной обратной задаче для m-й строки аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1984. Т. 124. С. 238–250.

3. *Гончар А. А.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1982. Т. 118. С. 535–556.

4. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134. С. 306–352.

5. *Гончар А. А.* Рациональные аппроксимации аналитических функций // Тр. Междунар. конгресса математиков (США, Беркли, 1986 г.). 1987. Т. 1. С. 739–748.

6. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157. С. 31–48.

7. *Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н.* Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. С. 33–58.

8. *Гончар А. А., Рахманов Е. А., Суетин С. П.* О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений // Тр. МИАН СССР. 1991. Т. 200. С. 136–146.